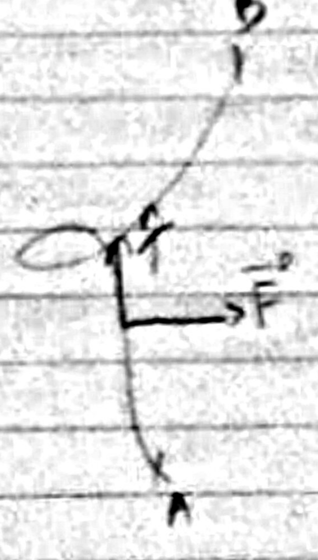
Τετάρτη 5 Απριλίου 2017

Έργο Δύναμης

Ορισμός: Το έργο που εκτελείται από μια δύναμη $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ επί λείας καμπύλης $\vec{r} = \vec{r}(t)$ στο χρονικό διάστημα $a \leq t \leq b$ είναι

$$W = \int_a^b \vec{F}\,\vec{T}\,ds = \int_a^b \vec{F}\,d\vec{r}$$

Αν θεωρήσουμε ένα διανυσματικό πεδίο δυνάμεων με $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ να παριστάνει μια δύναμη που δρα σε μια περιοχή του χώρου και ένα υλικό σημείο που κινείται στην καμπύλη $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ η ενέργεια που καταναλώνεται ή παράγεται για να μετακινηθεί το υλικό σημείο από το σημείο Α στο σημείο Β είναι $W = \int_{A\to B} \vec{F}\,\vec{T}\,ds = \int_{A\to B} \vec{F}\,d\vec{r}$



Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να υπολογίσουμε το έργο από τον ορισμό

1) $W = \int \vec{F}\,\vec{T}\,ds = \int \vec{F}\,d\vec{r} = \int \vec{F}\,\vec{v}\,dt$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ $\quad = \int \vec{F}\,\dfrac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int \vec{F}\,(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})\,dt$

$= \int (M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k})\cdot(\dot{x}\hat{i} + \dot{\psi}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})\,dt$

$= \int (M\dot{x} + N\dot{\psi} + P\dot{z})\,dt$

$= \int (M\dot{x}\,dt + N\dot{\psi}\,dt + P\dot{z}\,dt)$

$= \int (M\,dx + N\,d\psi + P\,dz)$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} \text{ ή } dx = \dot{x}\,dt \\ \dot{\psi} = \dfrac{d\psi}{dt} \text{ ή } d\psi = \dot{\psi}\,dt \\ \dot{z} = \dfrac{dz}{dt} \text{ ή } dz = \dot{z}\,dt \end{cases}$$

Παρατήρηση: $d\vec{r} = dx\,\hat{i} + d\psi\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

ώστε $\vec{F}\cdot d\vec{r} = M\,dx + N\,d\psi + P\,dz$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το έργο της $\vec{F} = (\psi - x^2)\hat{i} + (z - \psi^2)\hat{j} + (x - z^2)\hat{k}$

επί της καμπύλης $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$

από το $(0,0,0)$ στο $(1,1,1)$

$$\begin{cases} x = t \\ \psi = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$W = \int_0^1 \left[(\psi - x^2)\cdot 1 + (z - \psi^2)2t + (x - z^2)3t^2\right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[(t^2 - t^2) + (t^3 - t^4)2t + (t - t^6)3t^2\right] dt = \frac{29}{60}$$

2ος τρόπος:

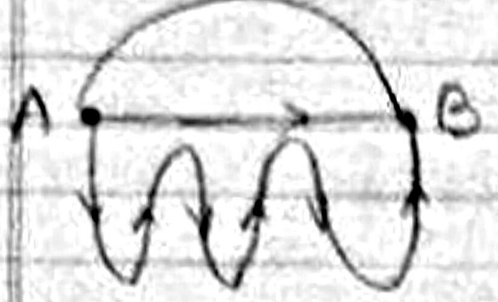
$t = x \qquad 0 \le x \le 1 \qquad dx = dx$

$\psi = x^2 \qquad d\psi = 2x\,dx$

$z = x^3 \qquad dz = 3x^2\,dx$

$W = \int M\,dx + N\,d\psi + P\,dz = \int_0^1 (x^2 - x^2)\,dx + (x^3 - x^4)2x\,dx + \ldots$

Γενικότερα το ουσιαστικό ερώτημα που θέλουμε να απαντήσουμε είναι η ενέργεια που πρέπει να δαπανήσουμε για να μετακινήσουμε ένα υλικό σημείο υπό την επίδραση μιας δύναμης ενός πεδίου γενικότερα.
Το έργο εξαρτάται γενικά από τα σημεία A και B αλλά και τη διαδρομή που ακολουθούμε.



<u>Ορισμός</u>: Έστω $\vec{F}$ ένα διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε ανοιχτό χωρίο D και A, B δύο τυχαία σημεία του D. Αν το έργο $W=\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}$ είναι το ίδιο για όλες τις διαδρομές από το A στο B δηλαδή είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που επιλέξαμε να ακολουθήσουμε με το πεδίο καλείται συντηρητικό ή διατηρητικό στο D (conservative).
Επιπλέον αν μπορούμε να γράψουμε $\vec{F}=\vec{\nabla} f$
όπου f διαφορίσιμη συνάρτηση που καλείται συνάρτηση δυναμικού τότε:

$$\int_A^B F\,dr = \int_A^B \vec{\nabla} f\,d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

$$\vec{\nabla} f\,d\vec{r} = \left(\frac{df}{dx}\hat{i} + \frac{df}{dy}\hat{j} + \frac{df}{dz}\hat{k}\right)(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$

$$= \left(\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz\right) = df$$

Θεώρημα: Έστω $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ ένα διανυσματικό πεδίο με συνεχείς συνιστώσες σε ένα ανοιχτό χωρίο D. Υπάρχει μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f = f(x,y,z)$ τέτοια ώστε $\vec{F} = \vec{\nabla} f = \frac{df}{dx}\hat{i} + \frac{df}{dy}\hat{j} + \frac{df}{dz}\hat{k}$ αν και μόνο αν για τα σημεία A, B του D το $\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}$ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που ακολουθούμε για να μεταβούμε από το A στο B. Επιπλέον αν το πεδίο είναι συντηρητικό

$$\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} = f(B) - f(A).$$

Απόδειξη:

$\vec{F} = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{df}{dy}\hat{j} + \frac{df}{dz}\hat{k}$ και άρα

$$\vec{\nabla} f\,d\vec{r} = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = df$$

από το Θεμελιώδες Θεώρημα

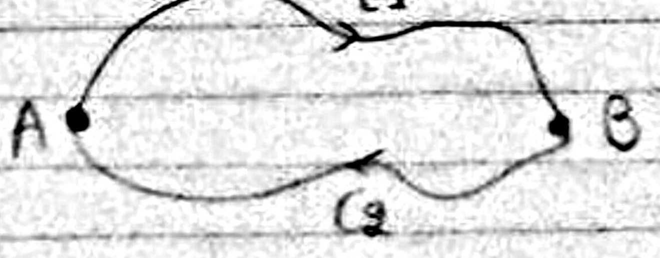
$$\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} = \int_A^B \vec{\nabla} f\,d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

Άμεση συνέπεια είναι το εξής Θεώρημα

Θεώρημα: Για μια κλειστή διαδρομή D

$$\oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} \text{ συντηρητικό}$$

Απόδειξη: Θεωρώ ότι $\oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0$



$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} = 0 \implies$$

$$\int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} = -\int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{-C_2} \vec{F} d\vec{r}$$

Άρα το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και το πεδίο είναι συντηρητικό.

Γνωρίζουμε ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{\nabla} f d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{\nabla} f d\vec{r}$$

$$= \underset{A \to B}{[f(B) - f(A)]} + \underset{B \to A}{[f(A) - f(B)]} = 0$$

Συνεπώς ισχύει το εξής:

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\nabla} f \implies \vec{F} \text{ συντηρητικό} \iff \oint \vec{F} d\vec{r} = 0}$$

Εύρεση του δυναμικού

Είναι προφανές ότι αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση $f = f(x,y,z)$ και η οποία είναι διαφορίσιμη τότε $\vec{F} = \frac{df}{dx} \hat{i} + \frac{df}{dy} \hat{j} + \frac{df}{dz} \hat{k} = \vec{\nabla} f$

Το ερώτημα είναι γνωρίζοντας το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}$ μπορούμε να βρούμε ένα δυναμικό f τέτοιο ώστε $\vec{F} = \vec{\nabla} f$; Επιπλέον υπάρχει πάντα ένα τέτοιο δυναμικό;

Θεώρημα: Για ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση f: $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ αν και μόνο αν $Mdx + Ndy + Pdz = df$ είναι τέλειο διαφορικό, ισοδύναμα μπορούμε να δείξουμε

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dN}{dz}, \quad \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}, \quad \frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy}$$

Απόδειξη:

$df = Mdx + Ndy + Pdz = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz$

άρα $M = \frac{df}{dx}$ | $\frac{dM}{dy} = \frac{d^2 f}{dy dx}$ λόγω της συνέχειας

$N = \frac{df}{dy}$ | $\frac{dN}{dx} = \frac{d^2 f}{dx dy}$ $\quad \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$

$P = \frac{df}{dz}$ αντίστοιχα για τις υπόλοιπες

Το αντίστροφο χρειάζεται το θεώρημα Stokes.

Θεώρημα Stokes

$\oint_c \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F}\, \hat{n}\, d\sigma$, $\hat{n}$ μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια S

και την ταυτότητα $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{0}$

Παρατήρηση: Στην ουσία ζητάμε να βρεθεί η συνάρτηση f αν υπάρχει τέτοια ώστε $\begin{cases} M = \frac{df}{dx} \\ N = \frac{df}{dy} \end{cases}$ $P = \frac{df}{dz}$

Παράδειγμα: Δίνεται το πεδίο

$\vec{F} = (e^x \cos\psi + \psi z)\hat{i} + (xz - e^x \sin\psi)\hat{j} + (x\psi + z)\hat{k}$

Να βρεθεί αν υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει $F = \vec{\nabla} f$.

$\frac{\partial f}{dx} = e^x \cos\psi + \psi z \Rightarrow f = e^x \cos\psi + x\psi z + g(\psi, z)$

$\frac{\partial f}{d\psi} = xz - e^x \sin\psi \Rightarrow -\sin\psi\, e^x + xz + \frac{dg}{d\psi} = xz - e^x \sin\psi$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dg}{d\psi} = 0 \Rightarrow g = g(z)$

$\frac{df}{dz} = x\psi + z \Rightarrow x\psi + g' = x\psi + z \Rightarrow g' = z \Rightarrow g = \frac{z^2}{2} + c$

Συνεπώς:

$f = e^x \cos\psi + x\psi z + \frac{z^2}{2} + c$

Άσκηση: Να εξετάσετε αν το πεδίο $\vec{F} = (2x-3)\hat{i} - z\hat{j} + \cos z\,\hat{k}$ είναι διατηρητικό και αν υπάρχει f τέτοιο ώστε $\vec{F} = \vec{\nabla} f$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} (\psi dx + x d\psi + 4dz) = \int \vec{F} d\vec{r}$$

με $\vec{F} = \psi\hat{i} + x\hat{j} + 4\hat{k}$
$= M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$

$\frac{dM}{d\psi} = \frac{dN}{dx} \Leftrightarrow 1 = 1$

$\frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx} \Leftrightarrow 0 = 0$

$\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{d\psi} \Leftrightarrow 0 = 0$

Άρα το πεδίο είναι διατηρητικό και $\exists f : \vec{F} = \vec{\nabla} f$

$\frac{df}{dx} = M = \psi \Rightarrow f = x\cdot\psi + g(\psi, z)$

$\frac{df}{d\psi} = N = x \Rightarrow x + \frac{dg}{d\psi} = x \Rightarrow \frac{dg}{d\psi} = 0 \Rightarrow g = g(z)$

$\frac{df}{dz} = P = 4 \Rightarrow g' = 4 \Rightarrow g = 4z + c$

Συνεπώς $f = xy + 4z + c$ και άρα

$$\int_{(1,1,1)}^{(9,3,-1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(9,3,-1) - f(1,1,1)$$

$$= (6+4+c) - (1+4+c)$$

$$= 5$$